

ЛІТЕРАТУРА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра технічної механіки
та сільськогосподарських машин

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для індивідуальних завдань
з прикладної механіки та опору матеріалів

Тернопіль 2017

--	--

Кафедра технічної механіки та сільськогосподарських машин

Склав: к.т.н., доц. *Цепенюк М.І.*

Рецензент: д.т.н., проф. Попович П.В.

Методичні вказівки розглянуті і затверджені на засіданні кафедри.
Протокол № 10 від „11” травня 2017 року.

Зміст

Вступ	4
Розділ I. Завдання для виконання індивідуальних робіт	5
1.1.Розрахунок на міцність і визначення деформацій при розтягу-стиску	5
1.2.Розрахунок статично невизначених систем, які працюють на розтяг-стиск	7
1.3.Визначення геометричних характеристик плоских перерізів	9
1.4.Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні	11
1.5 Розрахунок на міцність балки при згині	13
1.6.Розрахунок статично невизначеної балки	15
1.7.Розрахунок статично невизначеної рами	17
1.8.Розрахунок балки на міцність при косому згині	19
1.9.Розрахунок стержня великої жорсткості при позацентровому стиску	21
1.10.Розрахунок вала на згин з крученням	23
1.11.Розрахунок на стійкість стиснутого стержня	25
1.12.Визначення напружень і переміщень при ударі	27
Розділ II. Приклади розв'язування задач	29

ВСТУП

Методичні вказівки складені на основі освітньо-професійної програми (ОПП) підготовки бакалавра за напрямом 6.051003 „Приладобудування”. Згідно вказаної програми навчальна дисципліна прикладна механіка у даному випадку є наука про опір матеріалів.

Методичні вказівки складаються із вступу, двох розділів і рекомендованої літератури.

У першому розділі приведено 12 типових задач з опору матеріалів з таких тем: розтяг-стиск, геометричні характеристики плоских перерізів, кручення, згин, статично невизначені балки і рами, косий згин, позацентровий розтяг-стиск, сумісна дія згину і кручення, стійкість стиснутого стержня, ударні навантаження.

У другому розділі приведені розв’язки трьох задач, в яких виконані розрахунки на міцність статично невизначених систем при розтягу-стиску, згині та сумісній дії згину і кручення.

У Методичних вказівках приведений також список літератури, яка була використана при написанні посібника і яка буде корисна при самостійному розв’язуванні задач.

Деякі теми опору матеріалів Методичних вказівок виходять за межі робочої програми дисципліни „Прикладна механіка”, тому даний посібник може бути корисним також студентам механічних напрямів підготовки.

Методичні вказівки рекомендовані для використання при виконанні студентами індивідуальних завдань з дисциплін прикладна механіка та опір матеріалів.

Вказівки до вибору завдання

Номер розрахункової схеми та дані задач слід вибирати за трьома останніми цифрами залікової книжки (шифру) і трьома першими буквами алфавіту, які слід розмістити під цифрами, наприклад:

шифр	3	7	5
букви	а	б	в

З кожного вертикального стовбця таблиці, позначеного внизу певною буквою, необхідно взяти тільки одне значення, яке стоїть в тому рядку, номер якого співпадає з номером букви.

Наприклад, для шифру **375** задачі № 1 слід вибрати наступні значення:
схема - V; $F_1=40$ кН; $F_2=10$ кН; $F_3=10$ кН; $k=0,45$; $m=0,4$; $a=0,25$; матеріал СЧ 35-56.

РОЗДІЛ І. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ РОБІТ

І.І.РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПРИ РОЗТЯГУ-СТИСКУ

Задача 1

Для заданого ступінчастого стержня (рис. 1, табл. 1) визначити із умови міцності розміри перерізу на всіх ділянках, враховуючи, що форма перерізу круг (кільце); побудувати епюри нормальних напружень і повздовжніх переміщень: $l=8\text{ м}$, $a=kl$, $b=ml$; на ділянці, де переріз має форму кільця, прийняти $d/D=\alpha$.

Таблиця 1

№ n/n	Схема	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	k	m	a	Матеріал
0	I	5	30	50	0,2	0,5	0,60	Сталь Ст. 1
1	II	-10	40	20	0,4	0,7	0,00	СЧ 15-32
2	III	20	10	60	0,1	0,4	0,15	Сталь Ст.3
3	IV	15	20	40	0,3	0,6	0,20	Сталь Ст. 2
4	V	-30	25	10	0,25	0,65	0,25	СЧ 24-44
5	VI	25	50	25	0,35	0,75	0,30	Сталь Ст.2
6	VII	40	15	30	0,45	0,8	0,35	СЧ 35-56
7	VIII	20	60	50	0,15	0,6	0,40	Сталь Ст. 3
8	IX	-50	80	40	0,2	0,2	0,45	Сталь Ст.1
9	X	60	70	20	0,4	0,8	0,50	Сталь Ст. 4
	в	б	а	в	б	а	в	б

План розв'язування задачі №1

1. Зобразити розрахункову схему.
2. Побудувати епюру осьових сил.
3. Задавшись коефіцієнтом запасу міцності, визначити діаметри стержня на всіх ділянках. Зобразити ескіз стержня.
4. Визначити абсолютну повздовжню деформацію окремих ділянок стержня і побудувати епюру повздовжніх переміщень перерізів.
5. Обчислити на кожній ділянці стержня дійсне нормальне напруження і побудувати епюру напружень.

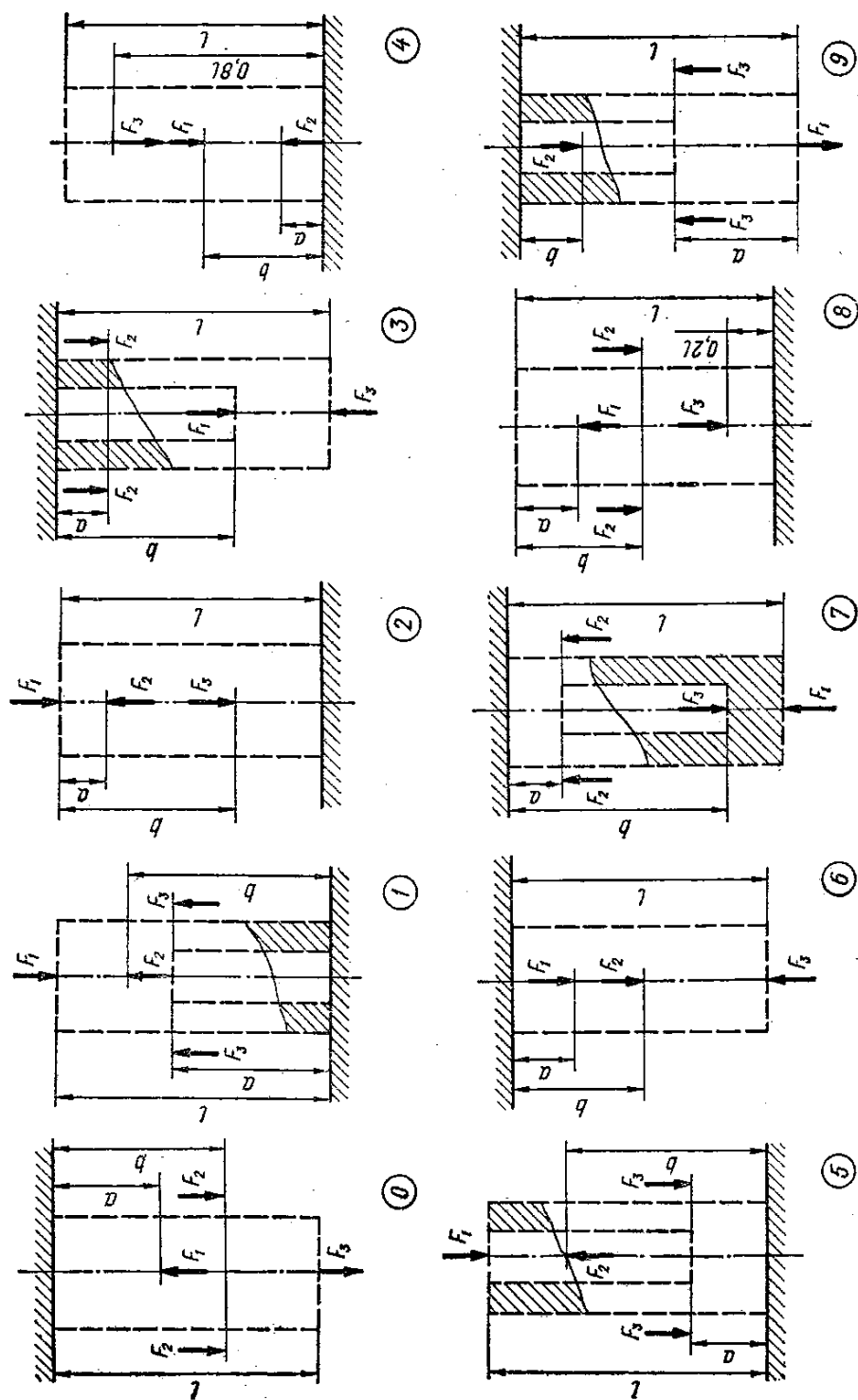


Рис.1

І.2.РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО-НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ, ЯКІ ПРАЦЮЮТЬ НА РОЗТЯГ-СТИСК

Задача 2

Для заданого абсолютно жорсткого бруса, який опирається на шарнірно нерухому опору і прикріплений до двох стержнів за допомогою шарнірів (рис.2, табл.2), визначити допустиме значення сили Q із розрахунку за методами допустимих напружень і руйнівних навантажень та порівняти отримані результати: $\sigma_T=240$ МПа, $[\sigma]=160$ МПа, коефіцієнт запасу міцності $k=1,5$.

Таблиця 2

№ п/п	Схема	A, см ²	а	б	с
			м		
1	I	11	2,1	2,1	1,1
2	II	12	2,2	2,2	1,2
3	III	13	2,3	2,3	1,3
4	IV	14	2,4	2,4	1,4
5	V	15	2,5	2,5	1,5
6	VI	16	2,6	2,6	1,6
7	VII	17	2,7	2,7	1,7
8	VIII	18	2,8	2,8	1,8
9	IX	19	2,9	2,9	1,9
10	X	20	3,0	3,0	2,0
	в	в	а	б	в

План розв'язування задачі №2

- 1.Зобразити розрахункову схему.
- 2.Записати рівняння статичної рівноваги для заданого бруса.
- 3.Визначити ступінь статичної невизначеності заданої системи, зобразити її після деформації і записати рівняння сумісності переміщень.
- 4.Записати фізичну сторону задачі.
- 5.Визначити невідомі опорні реакції, розв'язавши отримані рівняння.
- 6.Визначити допустиме значення сили Q із розрахунку за методом допустимих напружень.
7. .Визначити допустиме значення сили Q із розрахунку за методом руйнівних навантажень.
- 8.Порівняти отримані значення сили Q .

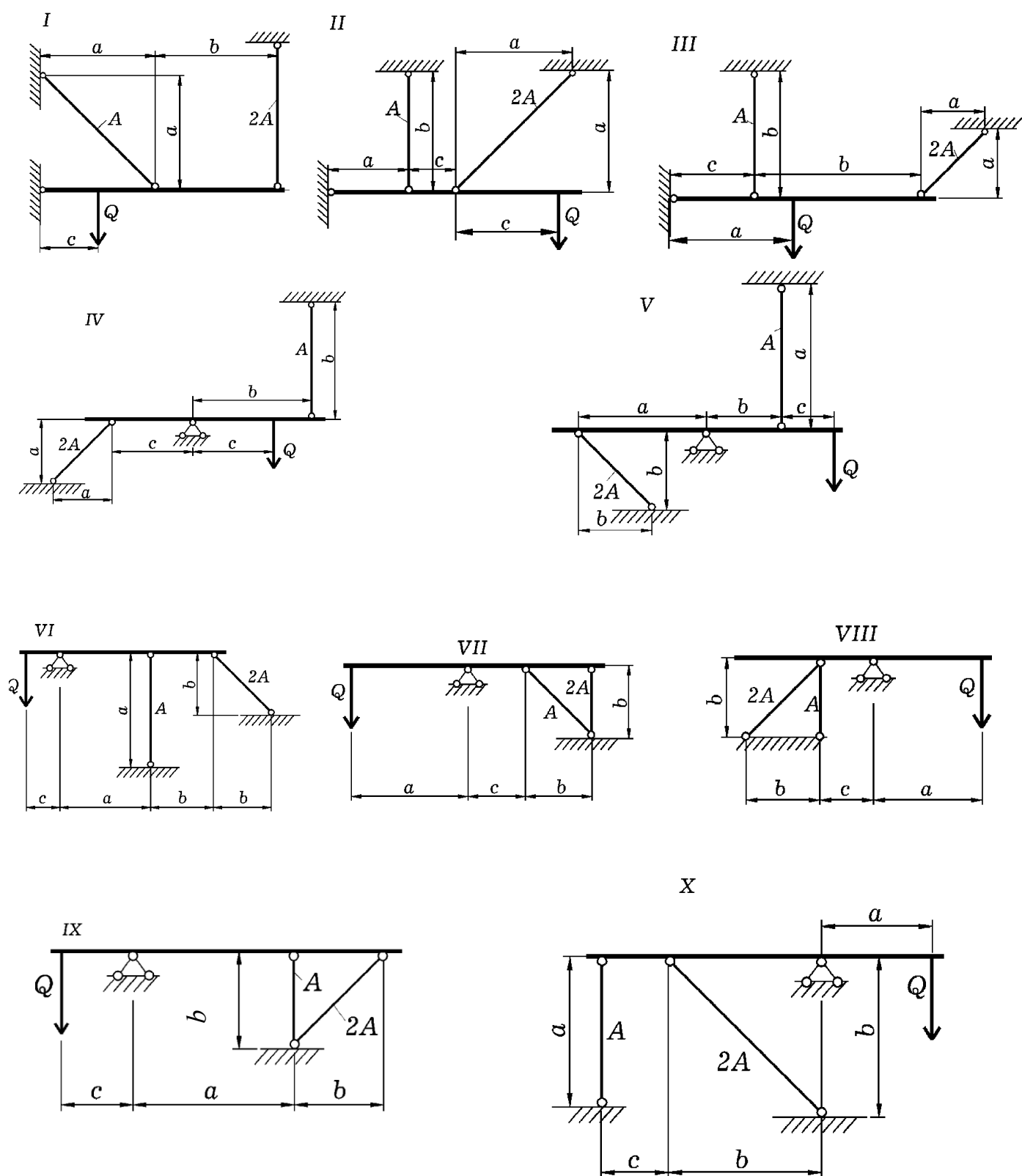


Рис.2

І.3.ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Задача 3

Для заданого складеного поперечного перерізу (рис. 3, табл. 3) знайти положення головних центральних осей інерції, обчислити головні центральні моменти інерції і накреслити переріз в масштабі.

Таблиця 3

№ п/п	Тип перерізу	Швелер	Рівнобічний кутник	Двотавр
1	I	8	40x40x4	10
2	II	10	45x45x4	12
3	III	12	50x50x4	14
4	IV	14	56x56x4	16
5	V	16	70x70x6	18
6	VI	18	80x80x6	20
7	VII	20	90x90x8	18
8	VIII	18	100x100x10	16
9	IX	16	110x110x8	14
10	X	14	125x125x12	12
	В	а	б	в

План розв'язування задачі №3

- 1.Виписати із таблиць сортаменту всі необхідні характеристики для заданих стандартних профілів.
- 2.Накреслити заданий складений переріз в масштабі і нанести всі необхідні розміри та осі.
- 3.Визначити координати центра ваги перерізу в довільно вибраній системі координат.
- 4.Обчислити осьові і центробіжний моменти інерції відносно центральних осей інерції перерізу.
- 5.Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.
- 6.Обчислити головні центральні моменти інерції перерізу.

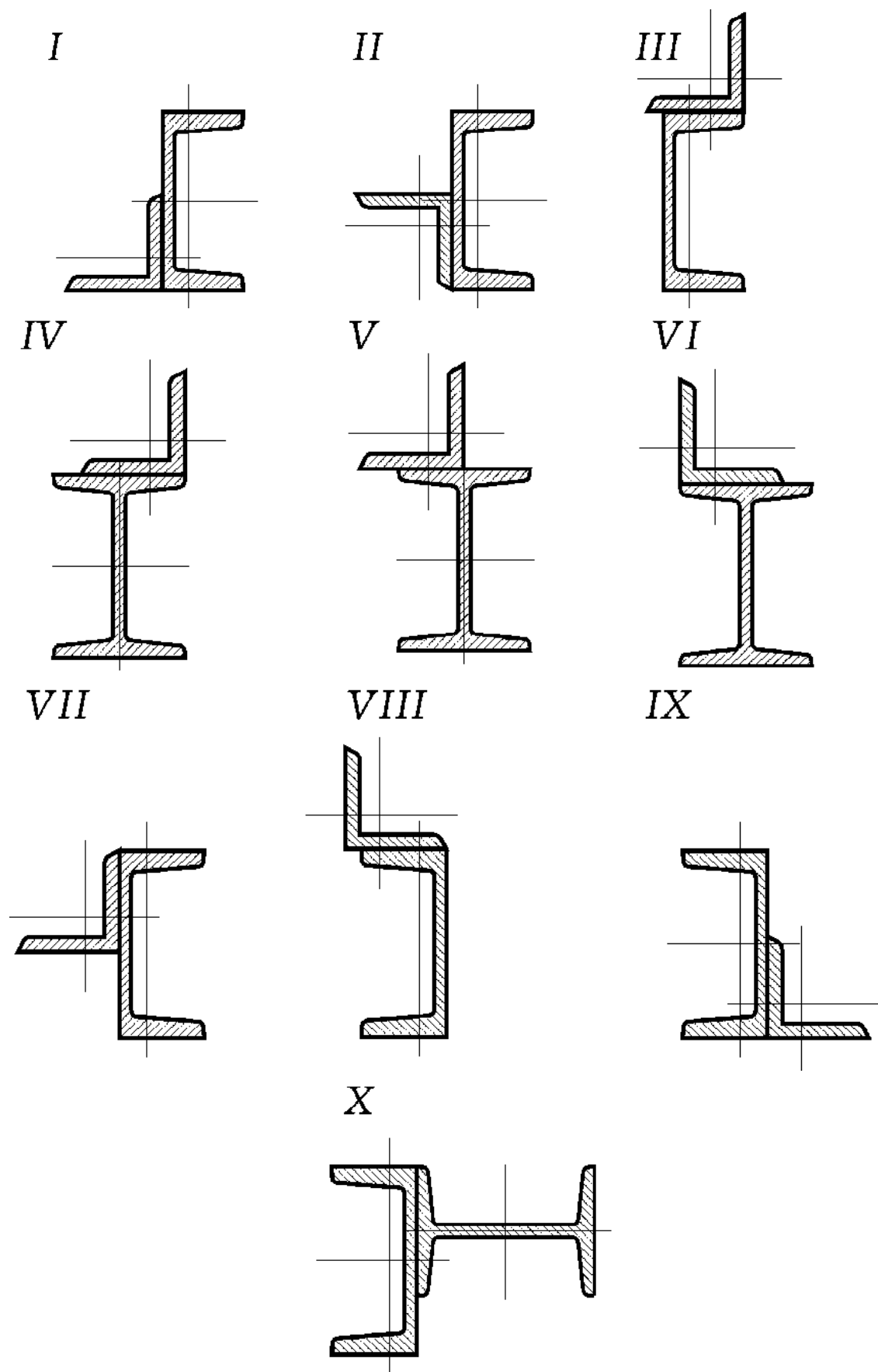


Рис. 3

1.4. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ВАЛА ПРИ КРУЧЕННІ

Задача 4

Визначити діаметри заданого вала (рис. 4, табл. 4) на кожній його ділянці із умови міцності і провести перевірку вала на жорсткість, якщо задано частоту обертання вала ω ; потужності, які передаються шківками $N_i (i = 1, 2, 3, 4)$; коефіцієнт запасу міцності $k = 1,5$ і відносний допустимий кут закручування $[\Theta] = 2$ град/м; $a = 0,4$ м.

Таблиця 4

№ n/n	Схема	N_1 , кВт	N_2 , кВт	N_3 , кВт	N_4 , кВт	ω , рад/с	Матеріал
0	I	0,1	0,2	0,3	0,4	40	Сталь 20Х
1	II	0,2	0,3	0,4	0,1	50	Сталь Ст. 3
2	III	0,3	0,4	0,1	0,2	60	Сталь 40Х
3	IV	0,4	0,3	0,2	0,1	70	СЧ 38-60
4	V	1,0	2,0	3,0	4,0	80	Сталь Ст. 5
5	VI	2,0	3,0	4,0	1,0	90	Сталь Ст. 4
6	VII	3,0	4,0	1,0	2,0	100	Сталь 20Х
7	VIII	4,0	1,0	2,0	3,0	150	Сталь Ст.1
8	IX	6,0	7,0	8,0	10,0	100	СЧ 35-58
9	X	10,0	20,0	30,0	40,0	200	Сталь Ст.1
	в	в	б	в	а	б	в

План розв'язування задачі №4

1. Зобразити розрахункову схему.
2. Визначити, нехтуючи тертям в підшипниках, потужність, яка передається шківом 0 (N_0).
3. Знайти скручувальні моменти, які передаються кожним шківом.
4. Визначити крутні моменти на кожній ділянці вала і побудувати епюру крутних моментів.
5. Визначити допустиме дотичне напруження $[\tau]$ і знайти діаметри вала на кожній його ділянці із умови міцності, округливши отримані результати.
6. Накреслити ескіз ступінчастого вала із позначенням його розмірів.
7. Визначити кути закручування окремих ділянок вала і побудувати епюру кутів закручування.
8. Зробити перевірку вала на жорсткість.

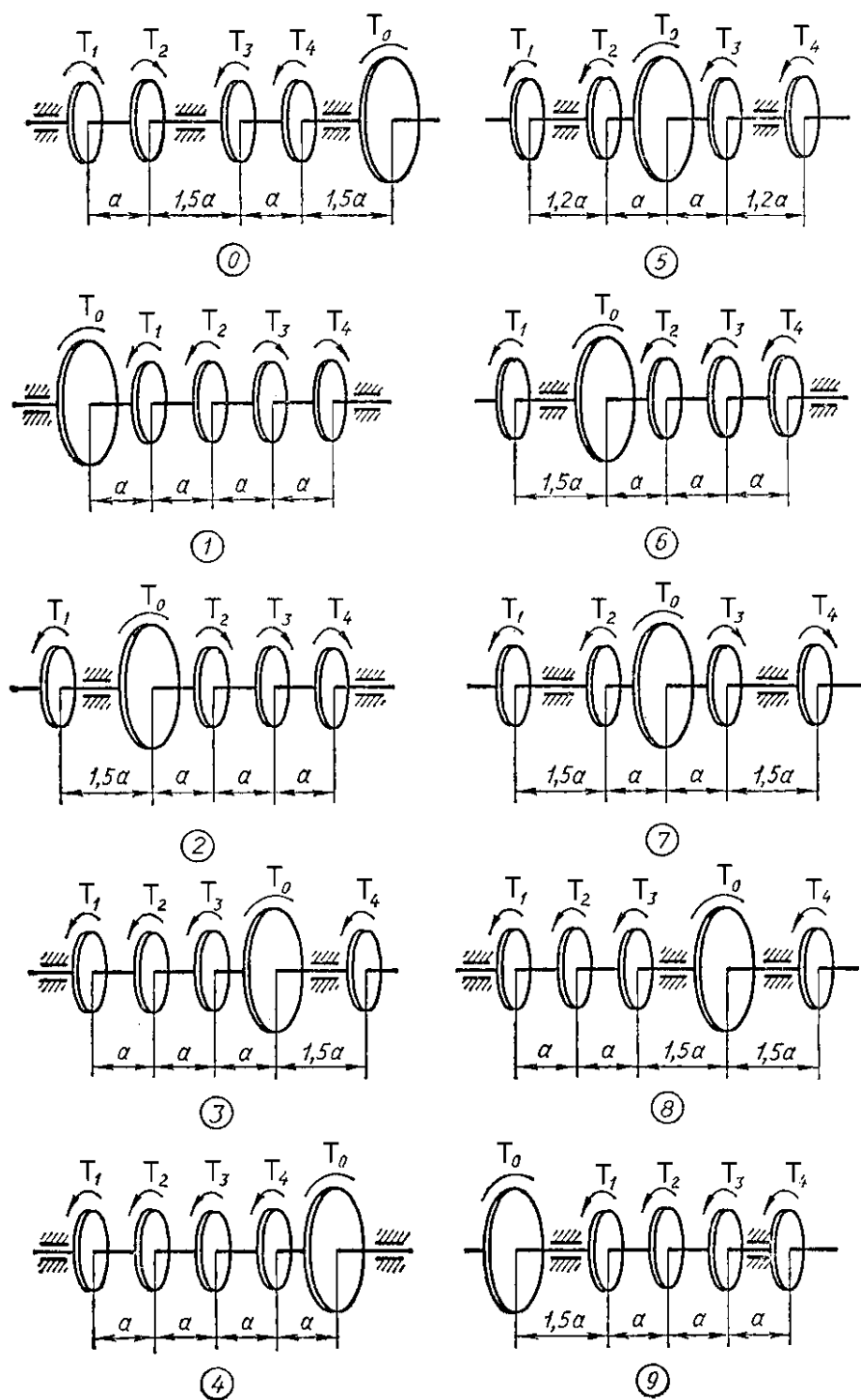


Рис.4

1.5 РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ БАЛКИ ПРИ ЗГИНІ

Задача 5

Для заданої балки (рис. 5, табл. 5) написати функції поперечної сили $Q(x)$ і згинального моменту $M(x)$ для кожної ділянки; побудувати епюри Q і M ; знайти максимальний згинальний момент M_{max} і підібрати сталю балку двотаврового поперечного перерізу при $[\sigma]=160 \text{ МПа}$.

Таблиця 5

№ п/п	Схема	$l, \text{м}$	Відносні довжини ділянок		$M, \text{кН м}$	$F, \text{кН}$	$q, \text{кН/м}$
			a_1/a	a_2/a			
1	I	6	1	9	10	10	10
2	II	7	2	8	20	20	20
3	III	3	3	7	3	3	3
4	IV	4	4	6	4	4	4
5	V	5	5	5	5	5	5
6	VI	6	6	6	6	6	6
7	VII	7	7	7	7	7	7
8	VIII	8	8	8	8	8	8
9	IX	9	9	9	9	9	9
10	X	10	5	4	10	10	10
	в	в	а	б	а	б	в

План розв'язування задачі №5

1. Зобразити розрахункову схему.
2. Записати функції поперечної сили $Q(x)$ і згинального моменту $M(x)$ для кожної ділянки балки і побудувати епюри Q і M .
3. Підібрати сталю балку двотаврового поперечного перерізу із умови міцності.

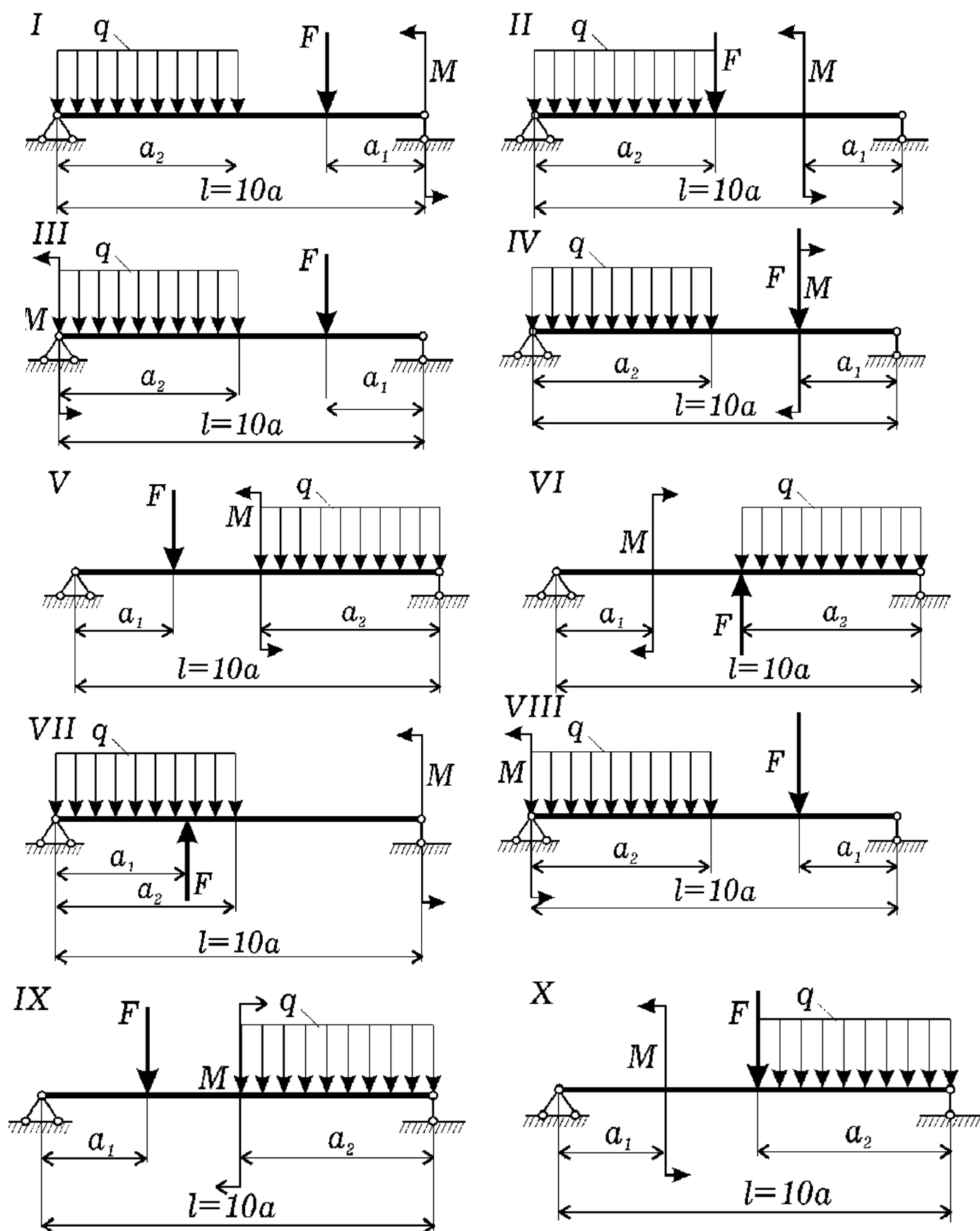


Рис. 5

1.6 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНОЇ БАЛКИ

Задача 6

Для заданої статично невизначеної балки (рис. 6, табл. 6) підібрати двотавровий переріз і визначити переміщення перерізу А.

Матеріал балки – Ст. 3; $[\sigma] = 160 \text{ Мн/м}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Мн/м}^2$; $a = 1 \text{ м}$.

Таблиця 6

№ n/n	Схема	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кН} \cdot \text{м}$	c	b	Вид переміщення
0	I	5	10	10	0	a	f_A
1	II	10	20	20	a	$2a$	θ_A
2	III	15	30	30	$2a$	$3a$	f_A
3	IV	20	-50	50	0	a	θ_A
4	V	-20	-10	-10	a	$2a$	f_A
5	VI	5	20	-20	$2a$	$3a$	θ_A
6	VII	-10	40	40	$3a$	$4a$	f_A
7	VIII	-15	-30	30	$3a$	$4a$	θ_A
8	IX	20	-40	-40	0	a	f_A
9	X	5	50	-50	a	$2a$	θ_A
	В	а	б	в	б	в	а

План розв'язування задачі №6

1. Зобразити розрахункову схему.
2. Встановити ступінь статичної невизначеності балки.
3. Розкрити статичну невизначеність, використовуючи рівняння трьох моментів.
4. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.
5. Перевірити правильність розкриття статичної невизначеності.
3. Підібрати сталю балку двотаврового поперечного перерізу із умови міцності.
6. Будь-яким з відомих методів визначити переміщення перерізу А.

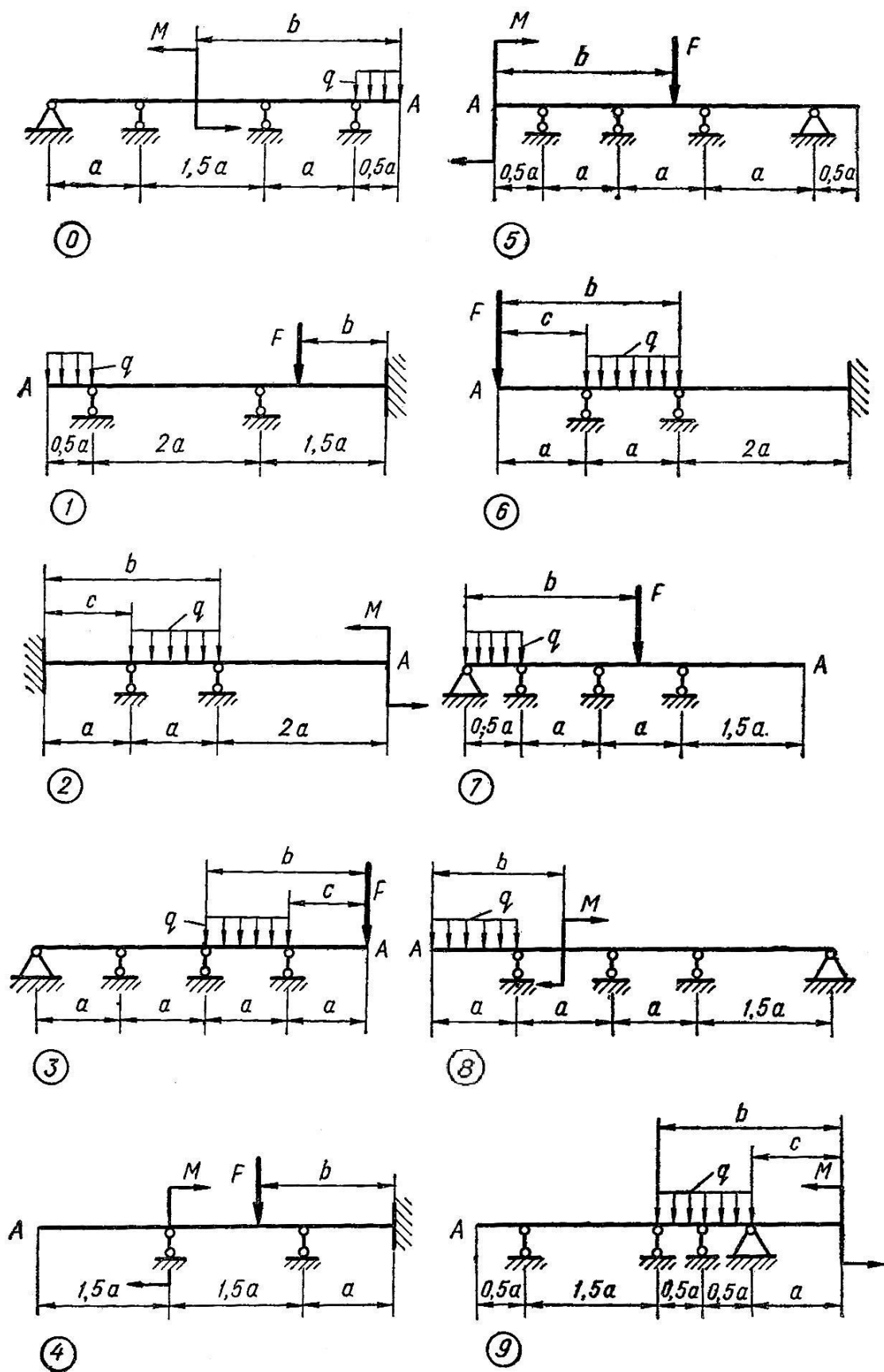


Рис.6

1.7 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНОЇ РАМИ

Задача 7

Для заданої статично невизначеної рами (рис. 7, табл.7) побудувати епюри поперечних сил і осьових сил, згинальних моментів; підібрати двотавровий переріз та визначити переміщення перерізу А.

Допустиме напруження матеріалу рами $[\sigma] = 160 \text{ МН/м}^2$, $a = 1 \text{ м}$, $q = 20 \text{ кН/м}$.

Із двох зв'язків (1, 2) треба залишити лише той, який вказано в табл. 7.

Таблиця 7

№ n/n	Схема	$F, \text{кН}$	$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	Вид переміщення	№ зв'язку
0	I	0	$1,4qa^2$	$f_A^{\text{верт}}$	1
1	II	qa	0	θ_A	2
2	III	2	$2Fa$	$f_A^{\text{верт}}$	1
3	IV	0	$-2qa^3$	θ_A	2
4	V	$-qa$	0	$f_A^{\text{верт}}$	1
5	VI	-2	$-2Fa$	θ_A	2
6	VII	0	$0,8qa^3$	$f_A^{\text{верт}}$	1
7	VIII	$-2qa$	0	θ_A	2
8	IX	1	$-3Fa$	$f_A^{\text{верт}}$	1
9	X	0	$-qa^3$	θ_A	2
	В	а	б	б	в

План розв'язування задачі №7

1. Вибрати основну систему і побудувати епюри згинальних моментів від зовнішніх і одиничних навантажень в основній системі.
2. Визначити коефіцієнт і вільний член канонічного рівняння.
3. Розв'язати канонічне рівняння і побудувати епюри M , N і Q для еквівалентної системи.
4. Перевірити правильність статичної невизначеності.
5. Визначити небезпечний переріз рами і підібрати двотавр з умови міцності за нормальними напруженнями, що виникають від згину.
6. Визначити, користуючись методом Верещагіна, вертикальне переміщення перерізу $f_A^{\text{верт}}$ або кут повороту θ_A (залежно від вказівок у таблиці).

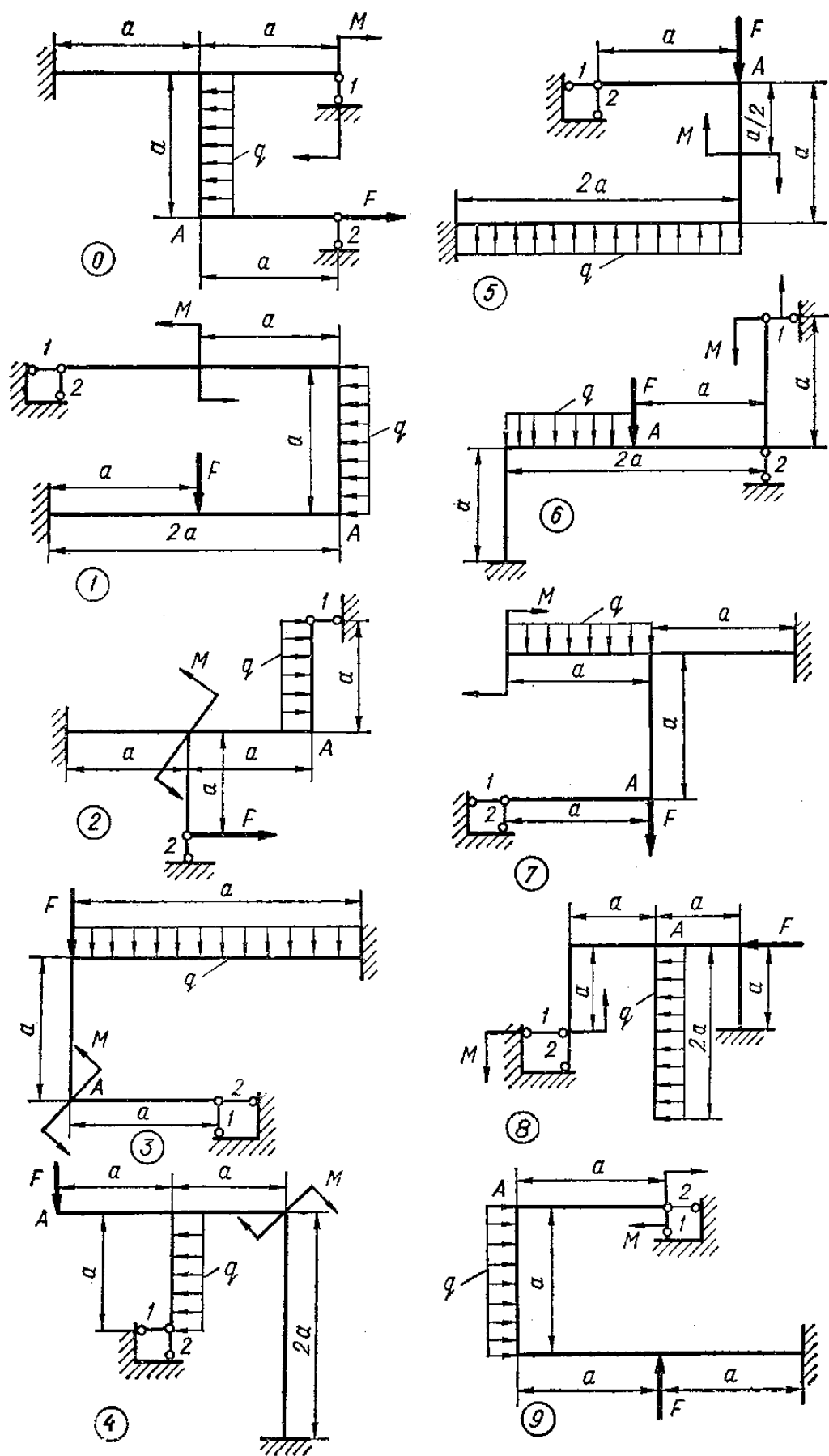


Рис.7

1.8. РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ КОСОМУ ЗГИНІ

Задача 8

Для заданої балки (рис. 8, табл. 8) підібрати прямокутний переріз із умови міцності при відношенні висоти балки до її ширини $\frac{h}{b} = 2$, розмістивши сторони h і b паралельно осям y і z найбільш раціонально, а також знайти положення нейтральної осі в небезпечному перерізі балки і побудувати просторову епюру розподілу напружень по перерізу.

Визначити повне переміщення перерізу, позначеного точкою A , якщо $a = 1$ м, матеріал балки сталь 40 ($E = 2 \cdot 10^5$ МН/м²); допустиме напруження $[\sigma] = 160$ МН/м².

Таблиця 8

№ п/п	Схема	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кН} \cdot \text{м}$	α°
0	I	5	12	-12	30
1	II	6	-10	10	45
2	III	8	-8	-8	60
3	IV	10	-6	6	120
4	V	12	-5	-5	135
5	VI	-5	12	12	150
6	VII	-6	10	-10	210
7	VIII	-8	8	8	225
8	IX	-10	6	-6	240
9	X	-12	5	5	300
	в	а	б	в	а

План розв'язування задачі №8

1. Розкласти навантаження по осях y і z і побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
2. Визначити небезпечний переріз і встановити найбільш раціональне розміщення перерізу відносно навантаження.
3. Знайти розміри перерізу балки, виходячи з умови міцності за нормальними напруженнями.
4. Визначити положення нейтральної осі в небезпечному перерізі балки і побудувати просторову епюру розподілу напружень по перерізу.
5. Визначити, користуючись методом Верещагіна, горизонтальний, вертикальний і повний прогини в точці A .

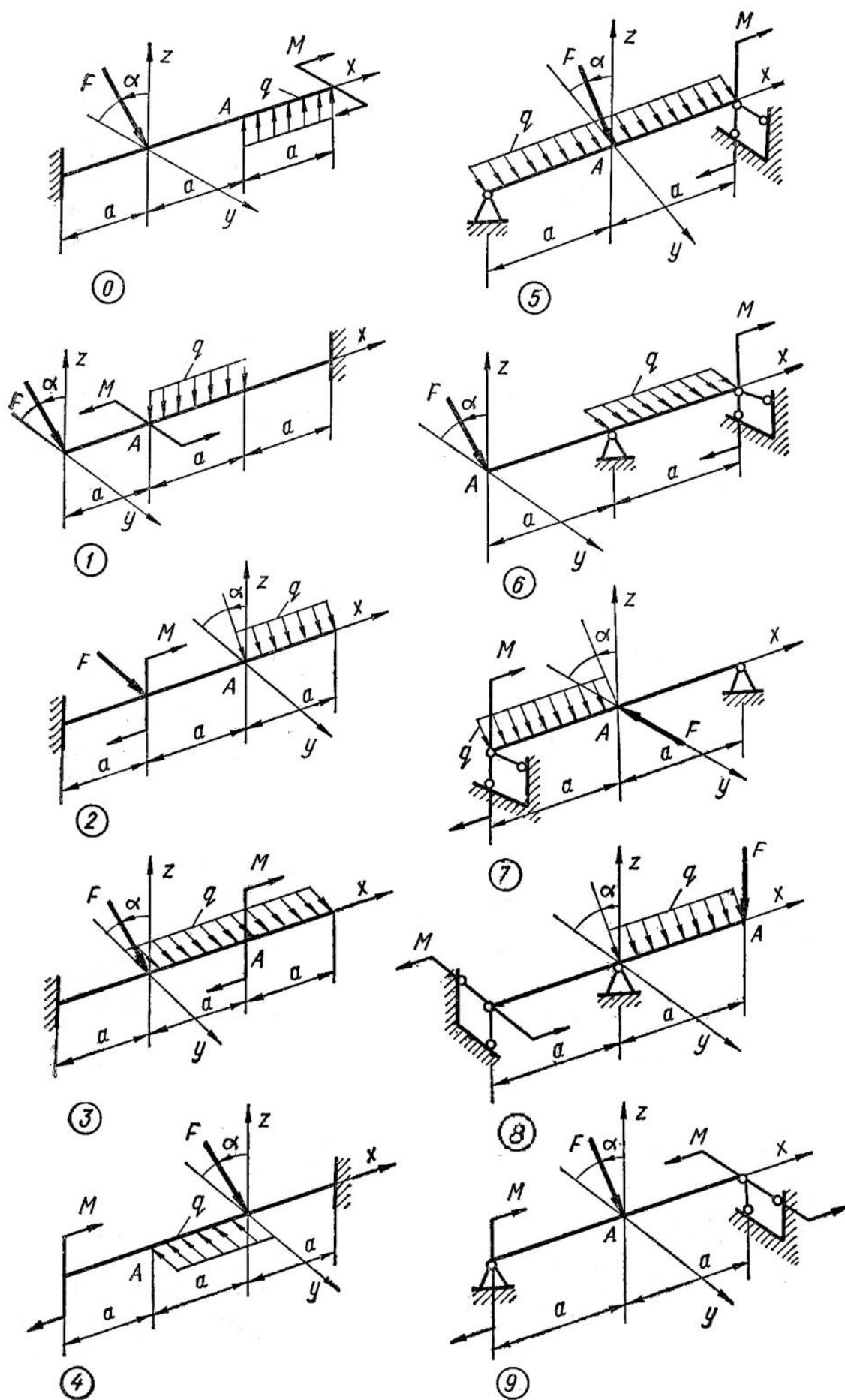


Рис.8

1.9. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЯ ВЕЛИКОЇ ЖОРСТКОСТІ ПРИ ПОЗАЦЕНТРОВОМУ СТИСКУ

Задача 9

Для стержня заданого перерізу (рис. 9а, 9б, табл. 9) визначити допустиме навантаження, якщо відомі координати y_A , z_A точки прикладання рівнодійної всіх навантажень F і величини допустимих напружень $[\sigma]_{\text{ст}} = 200 \text{ МН/м}^2$, $[\sigma]_{\text{р}} = 20 \text{ МН/м}^2$, а також побудувати просторову епюру розподілу напружень по перерізу.

Таблиця 9

№ n/n	Схема перерізу (рис. 9б)	y_A , см	z_A , см	a , см
0	I	10	20	50
1	II	30	40	60
2	III	30	60	70
3	IV	40	25	80
4	V	35	40	90
5	VI	10	30	50
6	VII	30	40	60
7	VIII	40	30	70
8	IX	20	40	80
9	X	40	50	100
	в	а	б	в

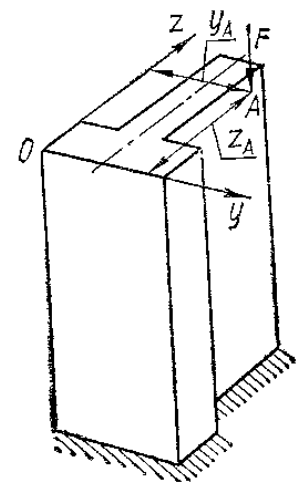


Рис.9а

План розв'язування задачі №9

1. Визначити положення головних центральних осей інерції і величину головних центральних моментів інерції перерізу стержня.
2. Визначити координати точки прикладання рівнодійної F всіх навантажень відносно головних центральних осей інерції.
3. Визначити величину згинальних моментів відносно головних центральних осей інерції.
4. Визначити положення нейтральної осі, допустиме навантаження з умови міцності в найбільш небезпечній точці перерізу.
5. Побудувати в аксонометрії епюру розподілу напружень по перерізу.

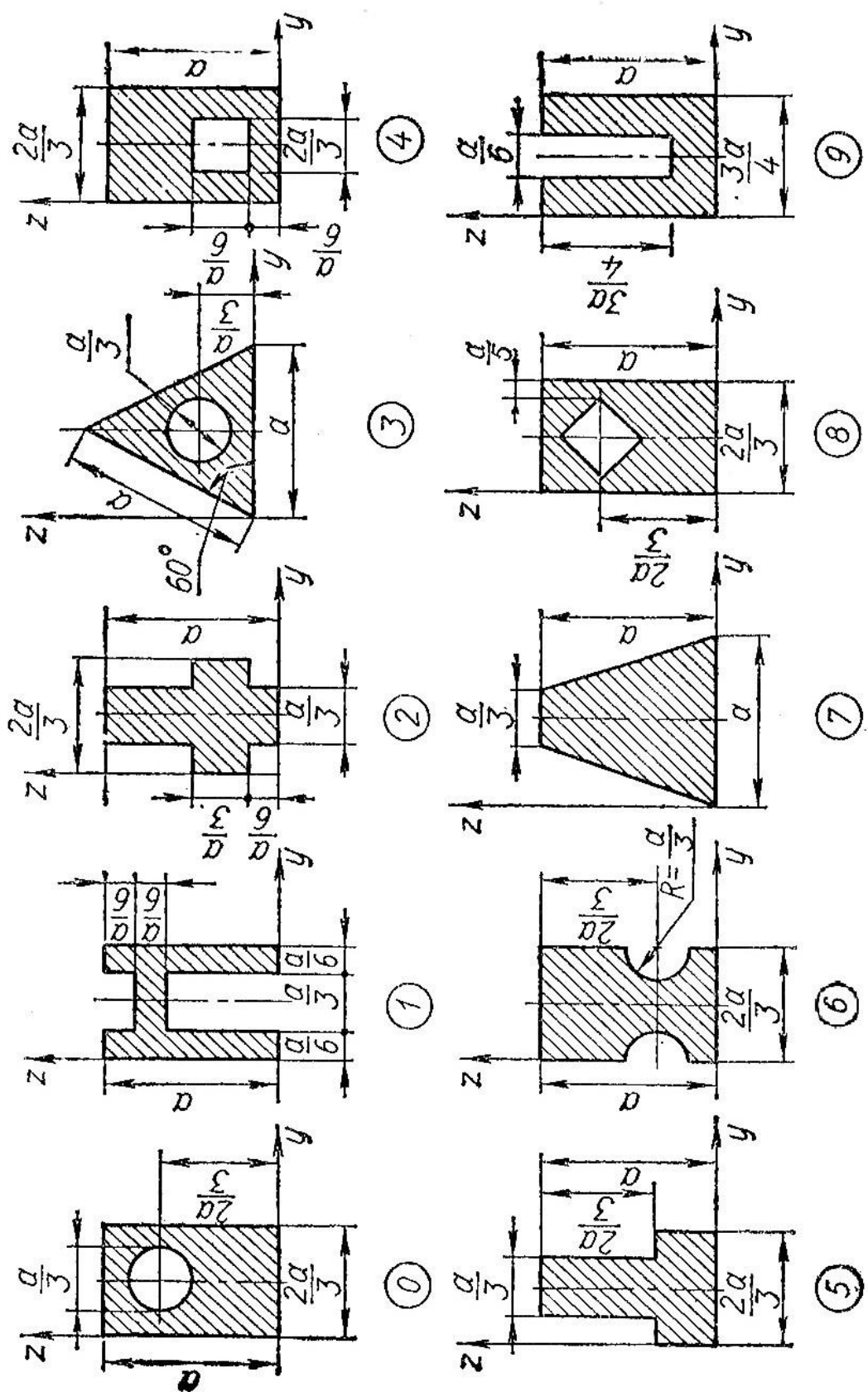


Рис. 9б

1.10. РОЗРАХУНОК ВАЛА НА ЗГИН З КРУЧЕННЯМ

Задача 10

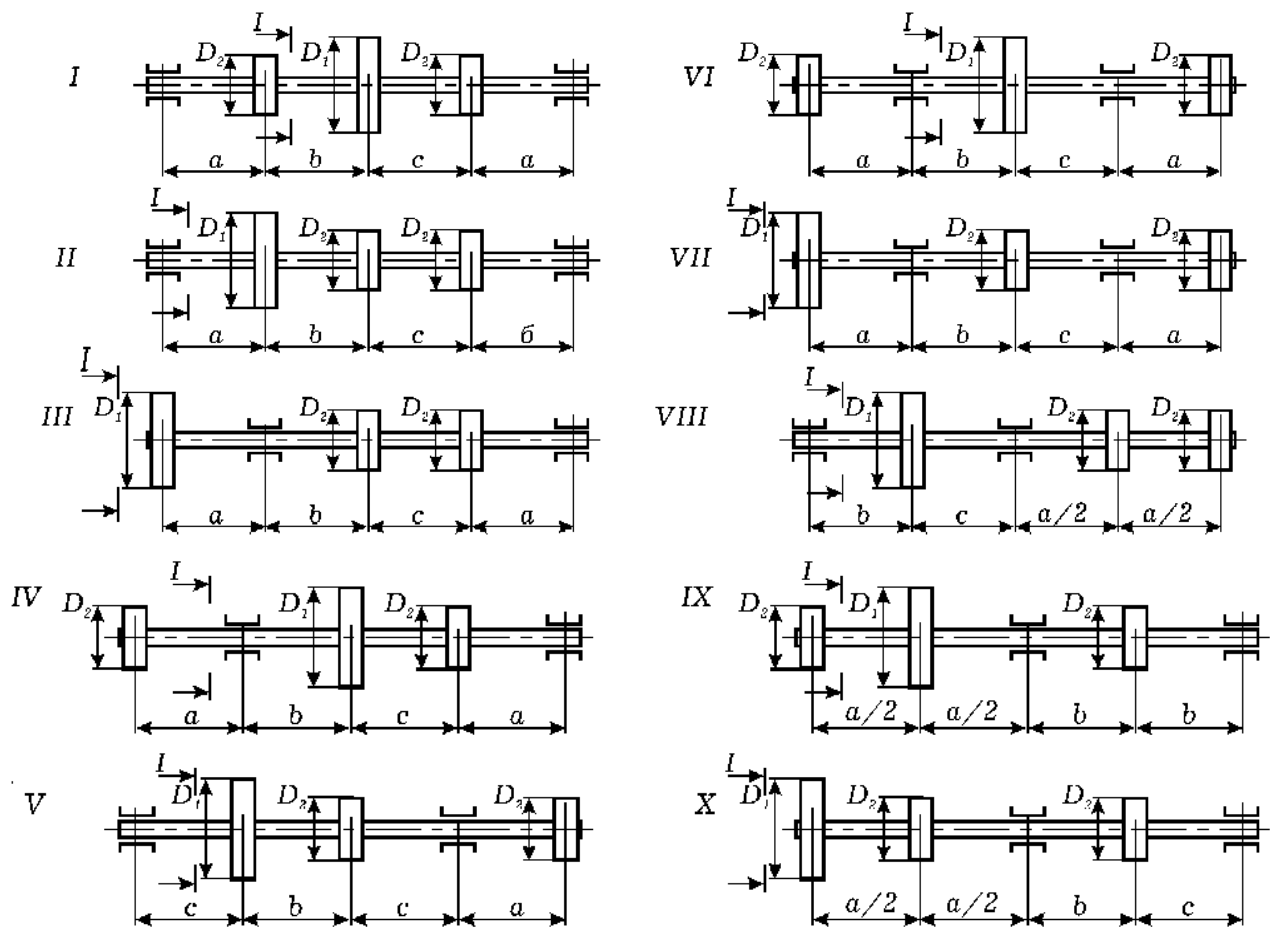
Шків діаметром D_1 і кутом нахилу віток паса до горизонту α_1 робить n обертів за хвилину і передає потужність P кВт. Два інших шківів діаметром D_2 і кутом нахилу віток паса до горизонту α_2 передають потужності $P/2$ кожний (рис. 10). Необхідно знайти небезпечний переріз вала і визначити за третьою теорією міцності максимальний розрахунковий момент; підібрати діаметр вала d при $[\sigma]=70\text{МПа}$. Дані взяти з таблиці 10.

Таблиця 10

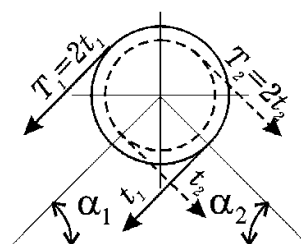
№ п/п.	Схема	Р кВт	n об/хв	a	b	c	D ₁	D ₂	α_1 град.	α_2 град.
				м						
1	I	10	100	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	10	10
2	II	20	200	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	20	20
3	III	30	300	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	30	30
4	IV	40	400	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	40	40
5	V	50	500	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	50	50
6	VI	60	600	1,6	1,6	1,6	0,6	0,6	60	60
7	VII	70	700	1,7	1,7	1,7	0,7	0,7	70	70
8	VIII	80	800	1,8	1,8	1,8	0,8	0,8	80	80
9	IX	90	900	1,9	1,9	1,9	0,9	0,9	90	90
10	X	100	1000	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0	0
	В	б	в	а	б	в	б	в	б	в

План розв'язування задачі №10

1. Зобразити розрахункову схему.
2. Визначити скручувальні моменти, які передаються шківками.
3. Визначити крутні моменти в перерізах вала і побудувати епюру.
4. Визначити сили тиску, які діють на вал.
5. Побудувати епюри згинальних моментів від сил, що діють у горизонтальній і вертикальній площинах.
6. Визначити сумарні згинальні моменти і побудувати епюру.
7. Обчислити розрахункові моменти за третьою теорією міцності і визначити небезпечний переріз.
8. Визначити діаметр вала із умови міцності.



Вид I-I


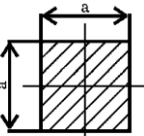
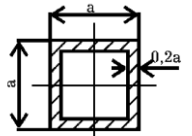
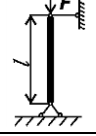
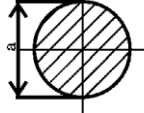
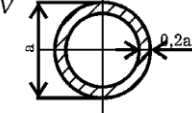
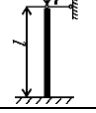
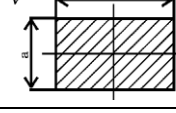
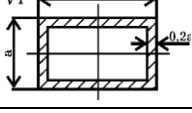
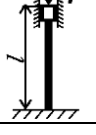
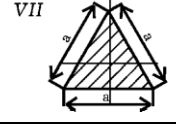
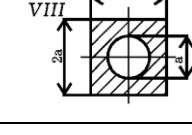
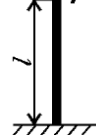
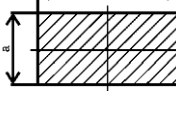
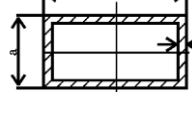


1.11. РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ СТИСНУТОГО СТЕРЖНЯ

Задача 11

Стальний стержень довжиною l центрально стискається силою F (таблиця 11). Необхідно: 1) визначити розміри поперечного перерізу при $[\sigma]=160$ МПа (розрахунок проводити методом послідовних наближень попередньо задавшись $\varphi_1 = 0,5$); 2) визначити критичну силу і коефіцієнт запасу стійкості.

Таблиця 11

№ п/п	F, кН	l, м	Схема стержня	Форма перерізу стержня
1 2	100 200	2.1 2.2		<div>I </div> <div>II </div>
3 4	300 400	2.3 2.4		<div>III </div> <div>IV </div>
5 6	500 600	2.5 2.6		<div>V </div> <div>VI </div>
7 8	700 800	2.7 2.8		<div>VII </div> <div>VIII </div>
9 0	900 1000	2.9 3.0		<div>IX </div> <div>X </div>
	а	б	б	В

План розв'язування задачі №11

1. Зобразити розрахункову схему.
2. Визначити площину найменшої жорсткості.
3. Визначити розміри поперечного перерізу стержня із умови стійкості.
4. Визначити критичну силу і коефіцієнт запасу стійкості.

1.12. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ УДАРІ

Задача 12

Для заданої пружної системи (рис. 12, табл. 12) визначити максимальні напруження, що виникають при ударі об неї вантажу $Q=100$ Н, який падає з висоти $H=0,5$, а також переміщення в зазначеному перерізі (табл. 12) в напрямі удару. Матеріал пружної системи – сталь, $l=2$ м, $d=0,04$ м.

Таблиця 12

№ n/n	l , м	k	D , см	Визначування деформація
0	0,5	0,0	4,5	$f_A^{верт}$
1	0,6	0,2	4,0	θ_B
2	0,7	0,3	5,0	$f_A^{верт}$
3	0,8	0,4	6,0	θ_B
4	0,9	1,0	7,0	$f_A^{верт}$
5	1,9	0,0	8,0	θ_B
6	1,0	0,7	9,0	$f_A^{верт}$
7	1,2	0,8	10,0	θ_A
8	1,5	0,9	11,0	$f_A^{верт}$
9	1,6	1,0	12,0	θ_B
	а	б	в	

План розв'язування задачі №12

1. Зобразити розрахункову схему.
2. Визначити небезпечний переріз стержня.
3. Визначити максимальні статичні напруження в стержні.
4. Визначити статичну деформацію в заданому перерізі.
5. Визначити статичну деформацію в місці удару.
6. Визначити динамічний коефіцієнт (без врахування власної власної ваги пружної системи).
7. Визначити максимальне динамічне напруження.
8. Визначити динамічну деформацію в заданому перерізі ($f_A^{верт}$ або θ_A). У схемі 6 (рис. 12) замість θ_A визначити $f_A^{верт}$.

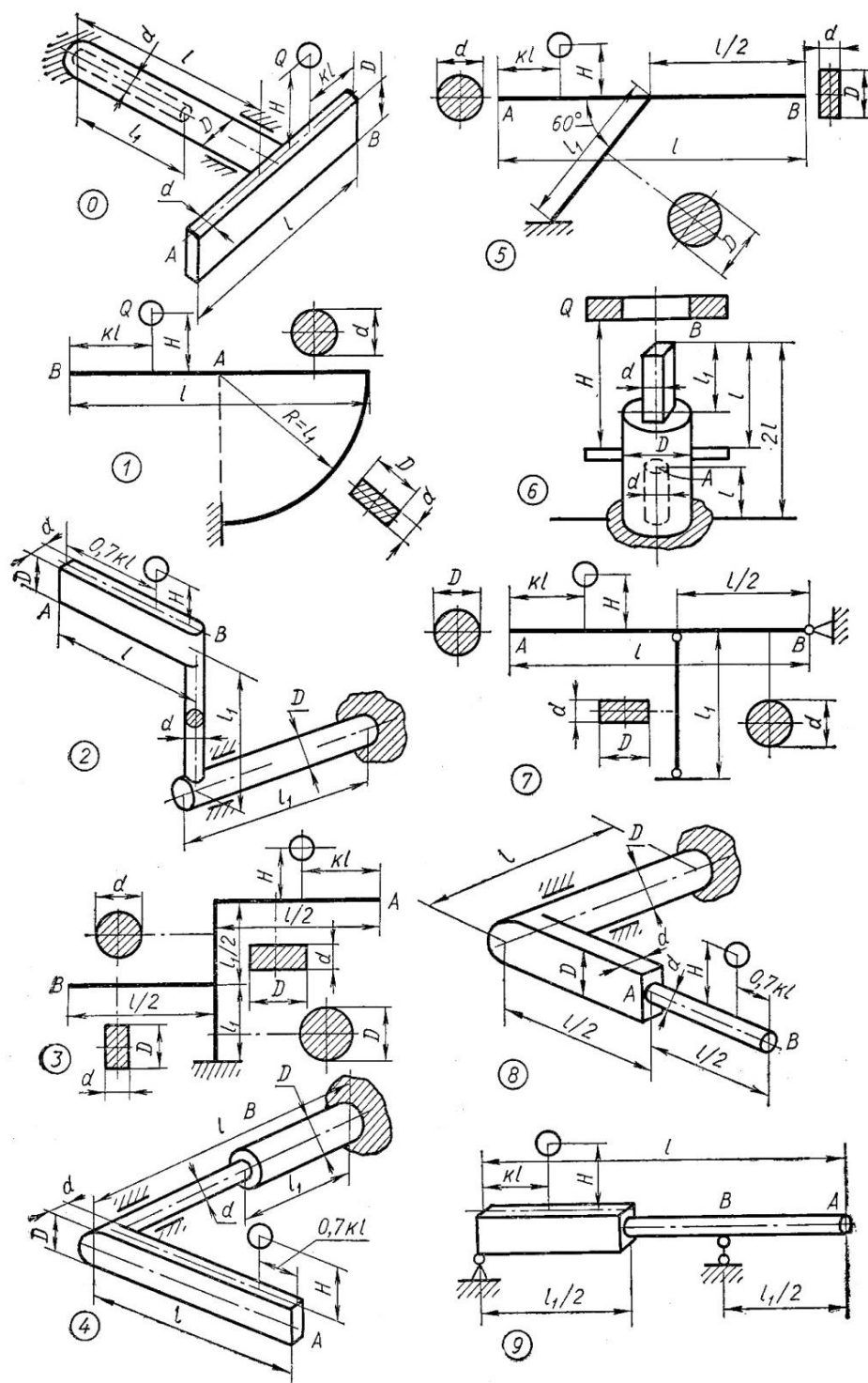


Рис. 12

РОЗДІЛ II. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

Задача 2

Абсолютно жорсткий брус AK опирається на шарнірно нерухому опору і прикріплений до двох стержнів за допомогою шарнірів (рис. 2.1а).

Потрібно: 1) визначити зусилля та напруження в стержнях, виразивши їх через силу Q ; 2) знайти допустиме навантаження $Q_{\text{доп}}$, прирівнявши більше з напружень у двох стержнях до допустимого напруження $[\sigma]=160\text{МПа}$; 3) знайти граничну вантажопідйомність Q_m^k системи та допустиме навантаження $Q_{\text{доп}}$, якщо границя текучості $\sigma_m=240\text{ МПа}$ та запас міцності $k=1,5$; 4) порівняти допустимі навантаження, отримані при розрахунку за допустимим напруженням та допустимим навантаженням. Площа A поперечного перерізу стержня KH рівна 20 см^2 .

Розв'язок

При навантаженні системи силою Q в стержнях DE і KH виникають осьові зусилля N_{DE} і N_{KH} , в даному випадку стискуючі (рис.2.1а,б). Крім того, в шарнірно нерухомій опорі B мають місце дві складові реакції B_x , B_y . Таким чином, у заданій плоскій системі є чотири невідомих. Рівнянь статки можна скласти три. Тому задача один раз статично невизначена. Для її розв'язування необхідно, крім рівнянь статки, скласти одне рівняння сумісності переміщень.

Для визначення зусиль в стержнях складаємо тільки одне рівняння рівноваги бруса AK (рис. 2.1б):

$$\Sigma M_B = 0; \quad Q(a+b) - N_{DE} \cdot b \cdot \sin \alpha - N_{KH} \cdot a = 0. \quad (2.1)$$

У результаті дії сили Q стержні DE і KH деформуються і система займе положення, яке показане на рис. 2.1в. З подібності трикутників $DD'B$ і $KK'B$ отримуємо:

$$\frac{DD'}{KK'} = \frac{DB}{KB} = \frac{b}{a} = \frac{2}{1} = 2. \quad (2.2)$$

У даному випадку:

$$KK' = \Delta l_{KH}; \quad DD' = \frac{\Delta l_{DE}}{\sin \alpha}, \quad (2.3)$$

де Δl_{KH} , Δl_{DE} абсолютні деформації стержнів KH і DE ;
 $\sin \alpha = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$ (рис.2.1а).

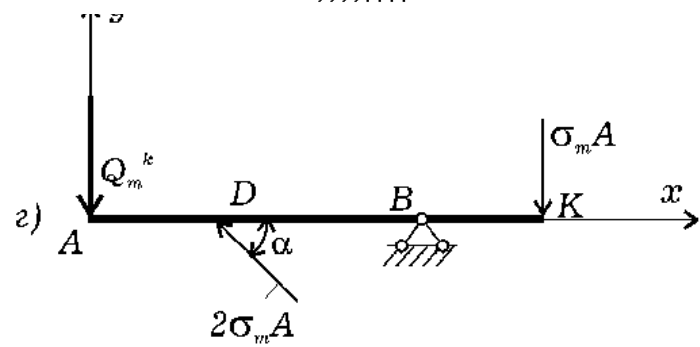
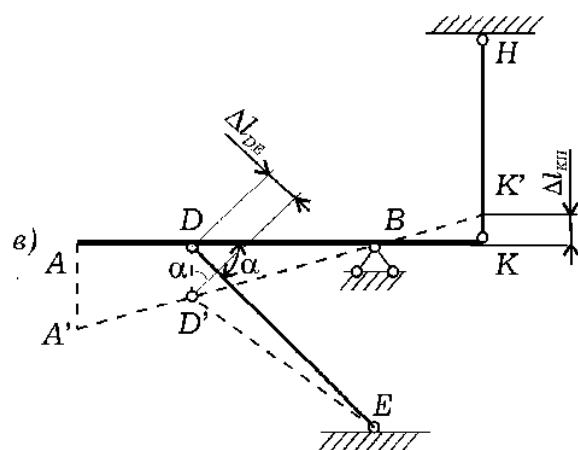
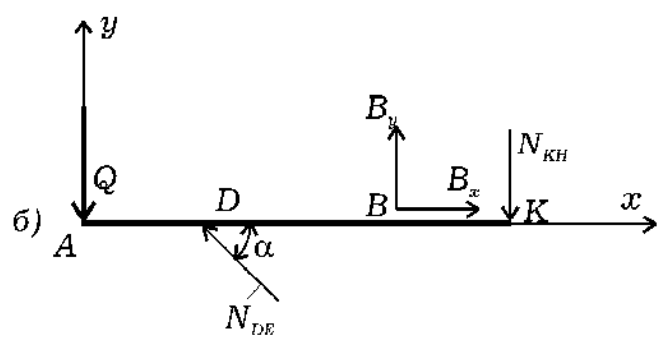
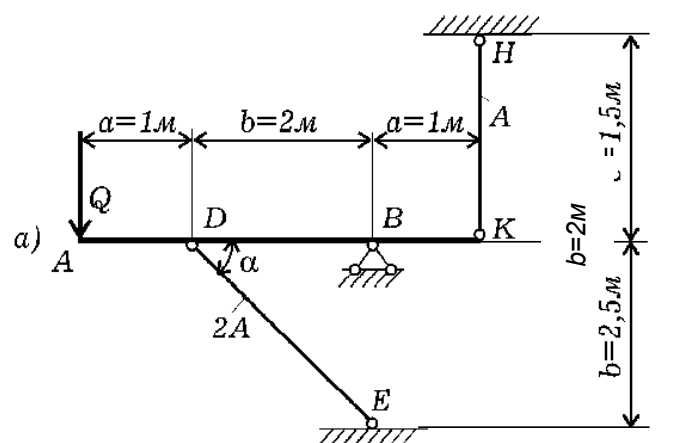


Рис. 2.1

Деформації стержнів за законом Гука запишемо у вигляді:

$$\Delta l_{KH} = \frac{N_{KH} \cdot c}{EA}; \quad \Delta l_{DE} = \frac{N_{DE} \cdot b}{2EA \cdot \sin \alpha}.$$

Підставляючи значення Δl_{KH} і Δl_{DE} у вирази (2.3) і враховуючи співвідношення (2.2), маємо:

$$\frac{N_{DE} \cdot b \cdot EA}{2EA \cdot \sin^2 \alpha \cdot N_{KH} \cdot c} = 2. \quad (2.4)$$

Розв'язуючи разом рівняння (2.1) і (2.4) і підставляючи значення величин, отримаємо:

$$\begin{aligned} 3Q - \sqrt{2}N_{DE} - N_{KH} &= 0; \\ 2N_{DE} - 3N_{KH} &= 0. \end{aligned}$$

Звідси:

$$N_{KH} = 1,04 \cdot Q, \quad N_{DE} = 1,56 \cdot Q.$$

Нормальні напруження в стержнях рівні:

$$\sigma_{KH} = \frac{N_{KH}}{A} = \frac{1,04Q}{20 \cdot 10^{-4}} = 520 \cdot Q; \quad (2.5)$$

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{2A} = \frac{1,56Q}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 390 \cdot Q. \quad (2.6)$$

У нашому випадку більш навантажений стержень KH . Тому, якщо $\sigma_{KH} = [\sigma]$, то $Q = Q'_{доп}$. Таким чином, допустиме навантаження з умови міцності за допустимим напруженням визначаємо із співвідношення (2.5):

$$520 Q'_{доп} = [\sigma]; \quad Q'_{доп} = \frac{[\sigma]}{520} = \frac{160 \cdot 10^3}{520} = 307,7 \text{ кН}. \quad (2.7)$$

При збільшенні навантаження в більш навантаженому стержні KH напруження досягне границі текучості σ_m . Зусилля у даному стержні буде рівне $\sigma_m A$ (рис.2.1г). При дальшому збільшенні сили стержні будуть стискуватись, але упродовж деякого часу напруження в стержні KH і відповідно зусилля будуть постійними (невідоме раніше зусилля $N_{KH} = \sigma_m A$) Так як напруження в стержні DE при цьому буде збільшуватись, то при деякому $Q = Q_m^k$ воно досягне границі текучості. Зусилля, відповідно, буде рівне $N_{DE} = 2\sigma_m A$. У такому стані стержні системи зазнають значних деформацій (у тому числі пластичних). Крім того, вони можуть далі деформуватись при сталому навантаженні. Такий стан системи є критичним. Навантаження, при якому настає такий стан, називається граничною вантажопідйомністю системи (Q_m^k).

Граничну вантажопідйомність визначаємо з рівняння статички згідно розрахункової схеми (рис.2.1г):

$$Q_m^k = \frac{2\sigma_m A \cdot b \cdot \sin \alpha + \sigma_m A \cdot a}{a + b} = \frac{2 \cdot 240 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 240 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1}{1 + 2} = 611,2 \text{ kN.}$$

Допустиме навантаження з розрахунку за допустимим навантаженням рівне:

(2.8)

$$Q''_{\text{доп.}} = \frac{Q_m^k}{k} = \frac{611,2}{1,5} = 407,5 \text{ kN.}$$

Порівнюючи величини $Q'_{\text{доп.}}$ і $Q''_{\text{доп.}}$, маємо:

$$\frac{Q''_{\text{доп.}}}{Q'_{\text{доп.}}} = \frac{407,5}{307,7} = 1,32.$$

Висновок: допустиме навантаження, отримане при розрахунку за допустимим навантаженням, більше від допустимого навантаження, отриманого при розрахунку за допустимим напруження, в 1,32 рази.

Задача 5

Для заданої балки (рис. 2.2а) написати функції поперечної сили $Q(x)$ і згинального моменту $M(x)$ для кожної ділянки, побудувати епюри Q і M , знайти максимальний згинальний момент M_{max} і з умови міцності підібрати сталю балку двотаврового поперечного перерізу при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язок

З рівнянь статичної рівноваги балки визначаємо опорні реакції (рис. 2.2а,б):

$$\Sigma M_B = 0; \quad -M + A_y \cdot 1,5 + q \cdot 1,5 \cdot 0,75 - F \cdot 2,0 = 0;$$

$$A_y = \frac{M - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 + F \cdot 2}{1,5} = \frac{16 - 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 2}{1,5} = 15,7 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad -M + B_y \cdot 1,5 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 - F \cdot 3,5 = 0;$$

$$B_y = \frac{M + q \cdot 1,5 \cdot 0,75 + F \cdot 3,5}{1,5} = \frac{16 + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 3,5}{1,5} = 60,7 \text{ кН};$$

Перевірка: $\Sigma Y = 0; \quad -A_y - q \cdot 1,5 + B_y - F = 0;$
 $-15,7 - 20 \cdot 1,5 + 60,7 - 15 = 0.$

Висновок: опорні реакції визначені правильно.

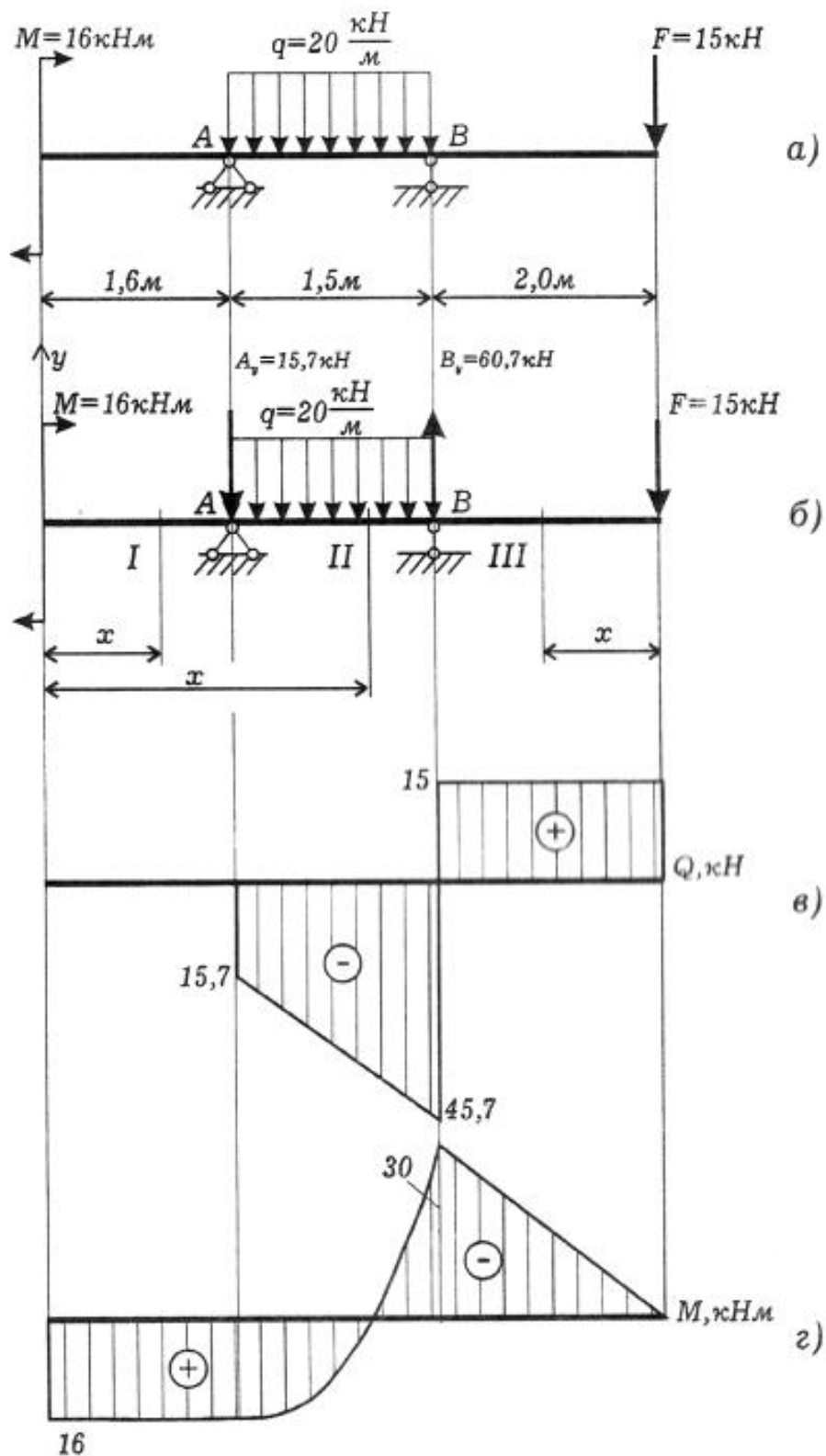


Рис. 2.2

Розбиваємо балку на три ділянки. Межами ділянок є перерізи, де прикладені зосереджені сили і згинальні моменти і перерізи, де починається і закінчується розподілене навантаження.

При поперечному згині в перерізах мають місце два зусилля (внутрішні силові фактори) - згинальний момент $M(x)$ і поперечна сила $Q(x)$. Для їх визначення використовуємо метод перерізів.

На кожній ділянці балки (для консольної балки розглядаємо ділянки від вільного кінця) робимо уявно переріз, відкидаємо, наприклад, ліву частину балки і розглядаємо рівновагу правої. Сили взаємодії частин балки замінюємо внутрішніми зусиллями - $Q(x)$ і $M(x)$. Останні визначаємо як функції від x на підставі рівнянь рівноваги. При цьому поперечну силу вважаємо додатною, якщо рівнодіюча зовнішніх сил зліва від перерізу направлена знизу вверх, а справа - зверху вниз (рис.2.3а). Згинальний момент в перерізі балки вважаємо додатним, якщо рівнодіючий момент зовнішніх пар сил зліва від перерізу направлений за рухом годинникової стрілки, а справа - проти (рис. 2.3б). У протилежному випадку величини $Q(x)$ і $M(x)$ вважаємо від'ємними.

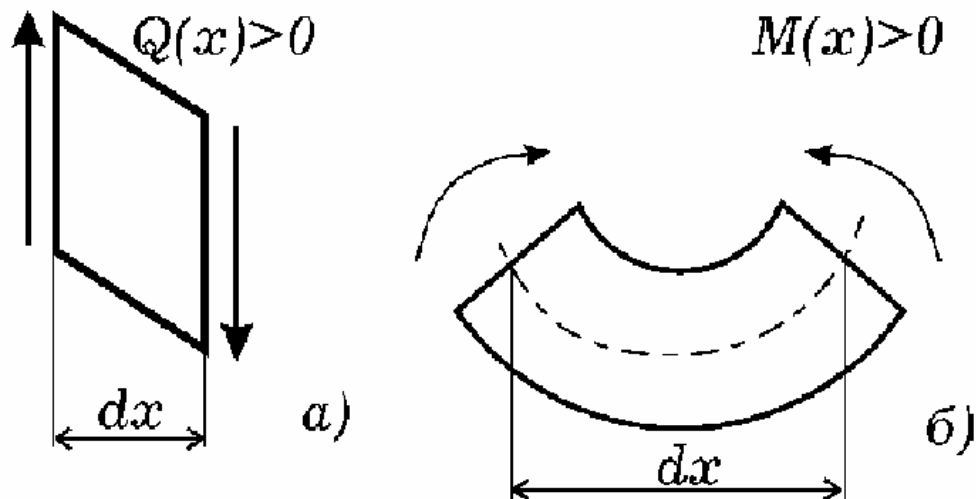


Рис. 2.3

Визначаємо функції поперечної сили $Q(x)$ і згинального моменту $M(x)$ для кожної ділянки балки (рис. 2.2б):

ділянка 1, $0 \leq x \leq 1,6$ м (зліва);

$$Q(x) = 0;$$

$$M(x) = M;$$

$$M(0) = M(1,6) = 16 \text{ кНм};$$

ділянка 2,

$1,6 \text{ м} \leq x \leq 3,1$ м (зліва):

$$Q(x) = -Ay - q(x - 1,6);$$

$$Q(1,6) = -15,7 \text{ кН};$$

$$Q(3,1) = -15,7 - 20(3,1 - 1,6) = -45,7 \text{ кН};$$

$$M(x) = M - Ay(x - 1,6) - q \frac{(x - 1,6)^2}{2}; \quad M(1,6) = 16 \text{ кНм};$$

$$M(3,1) = 16 - 15,7 \cdot (3,1 - 1,6) - 10 \cdot (3,1 - 1,6)^2 = -30 \text{ кНм};$$

ділянка 3, $0 \leq x \leq 2,0$ м (справа);

$$Q(x) = F; \quad Q(0) = Q(2,0) = 15 \text{ кН};$$

$$M(x) = -Fx; \quad M(0) = 0; \quad M(2,0) = -15 \cdot 2,0 = -30 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри Q і M (рис. 2.2в,г). Максимальний згинальний момент діє в перерізі балки над опорою В: $M_{\max} = 30 \text{ кНм}$.

Необхідний осьовий момент опору перерізу сталюї балки визначаємо за формулою:

$$W_O = \frac{M_{\max}}{\sigma} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 188 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Із таблиці сортаменту прокатної сталі підбираємо двотавр №20а (ГОСТ 8239-72), для якого $W_O = 203 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Задача 10

Шків діаметром D_1 і кутом нахилу віток паса до горизонту α_1 робить n обертів за хвилину і передає потужність P кВт. Два інших шківів діаметром D_2 і кутом нахилу віток паса до горизонту α_2 передають потужності $P/2$ (рис. 2.4а). Необхідно знайти небезпечний переріз вала і визначити за третьою теорією міцності максимальний розрахунковий момент; підібрати діаметр вала d при $[\sigma]=70\text{МПа}$; якщо $\alpha_1=45^\circ$, $\alpha_2=30^\circ$, $D_1=1\text{м}$; $D_2=0,5\text{м}$; $P=20\text{кВт}$; $n=100\text{об/хв}$.

Розв'язок

Вибираємо систему координат як вказано на рис. 2.4а. Так як обертання вала відбувається з постійною кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 100}{30} = 10,5 \text{ с}^{-1},$$

то скручувальний момент, який передається з першого шківів на вал, рівний

$$T_{ck1} = \frac{P}{\omega} = \frac{20 \cdot 10^3}{10,5} = 1905 \text{ Нм},$$

а з другого шківів

$$T_{ck2} = \frac{P}{2\omega} = \frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10,5} = 952,5 \text{ Нм}.$$

Використовуючи метод перерізів, визначаємо внутрішні крутні моменти, що виникають у перерізах вала:

$$M_{K1} = -T_{ck1} = -1905 \text{ Нм},$$

$$M_{K2} = -T_{ck1} + T_{ck2} = -952,5 \text{ Нм}$$

і будуємо епюру (рис. 2.4б).

Скручувальний момент, який передається зі шківів на вал,

$$T_{ck} = T \frac{D}{2} - t \frac{D}{2} = (T - t) \cdot \frac{D}{2} = \frac{tD}{2},$$

де t -сила натягу збігаючої вітки паса; $T=2t$ -сила натягу набігаючої вітки паса.

Звідки:

$$t = \frac{2T_{ck}}{D}, \quad T = \frac{4T_{ck}}{D}.$$

Сила тиску, яка діє на вал в місці кріплення шківів, рівна

$$F = t + T = \frac{6T_{ck}}{D}.$$

Тоді

$$F_1 = \frac{6T_{ck1}}{D_1} = \frac{6 \cdot 1905}{1,0} = 11430 \text{ Н};$$

$$F_2 = \frac{6T_{ck2}}{D_2} = \frac{6 \cdot 952,5}{0,5} = 11430 \text{ Н}.$$

Розглянемо згин вала в вертикальній площині. Будуємо розрахункову схему (рис. 2.4в).

Тут

$$F_{1Z} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 11430 \cdot \sin 45^\circ = 8082H;$$

$$F_{2Z} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 11430 \cdot \sin 30^\circ = 5715H.$$

де Z_A, Z_B - вертикальні складові опорних реакцій в місцях кріплення підшипників. Значення Z_A, Z_B знаходимо з рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum M_A = F_{1Z} \cdot 0,7 - F_{2Z} \cdot 0,7 - F_{2Z} \cdot 3,3 + Z_B \cdot 2,2 = 0; \\ \sum M_B = F_{1Z} \cdot 2,9 - Z_A \cdot 2,2 + F_{2Z} \cdot 1,5 - F_{2Z} \cdot 1,1 = 0; \end{cases}$$

$$Z_B = \frac{F_{2Z} \cdot 4 - F_{1Z} \cdot 0,7}{2,2} = \frac{5715 \cdot 4 - 8082 \cdot 0,7}{2,2} = 7819H;$$

$$Z_A = \frac{F_{1Z} \cdot 2,9 + F_{2Z} \cdot 0,4}{2,2} = \frac{8082 \cdot 2,9 + 5715 \cdot 0,4}{2,2} = 11693H.$$

Перевірка:

$$\sum Z = -F_{1Z} - 2F_{2Z} + Z_A + Z_B = -8082 - 11430 + 11693 + 7819 = 0.$$

Визначаємо внутрішні згинальні моменти в характерних точках вертикальної площини:

$$M_Y^K = 0; M_Y^A = -F_{1Z} \cdot 0,7 = -8082 \cdot 0,7 = -5657H \cdot m;$$

$$M_Y^C = -F_{1Z} \cdot 1,4 + Z_A \cdot 0,7 = -8082 \cdot 1,4 + 11693 \cdot 0,7 = -3129H \cdot m;$$

$$M_Y^L = 0; M_Y^B = -F_{2Z} \cdot 1,1 = -5715 \cdot 1,1 = -6287H \cdot m.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині (рис. 2.4г).

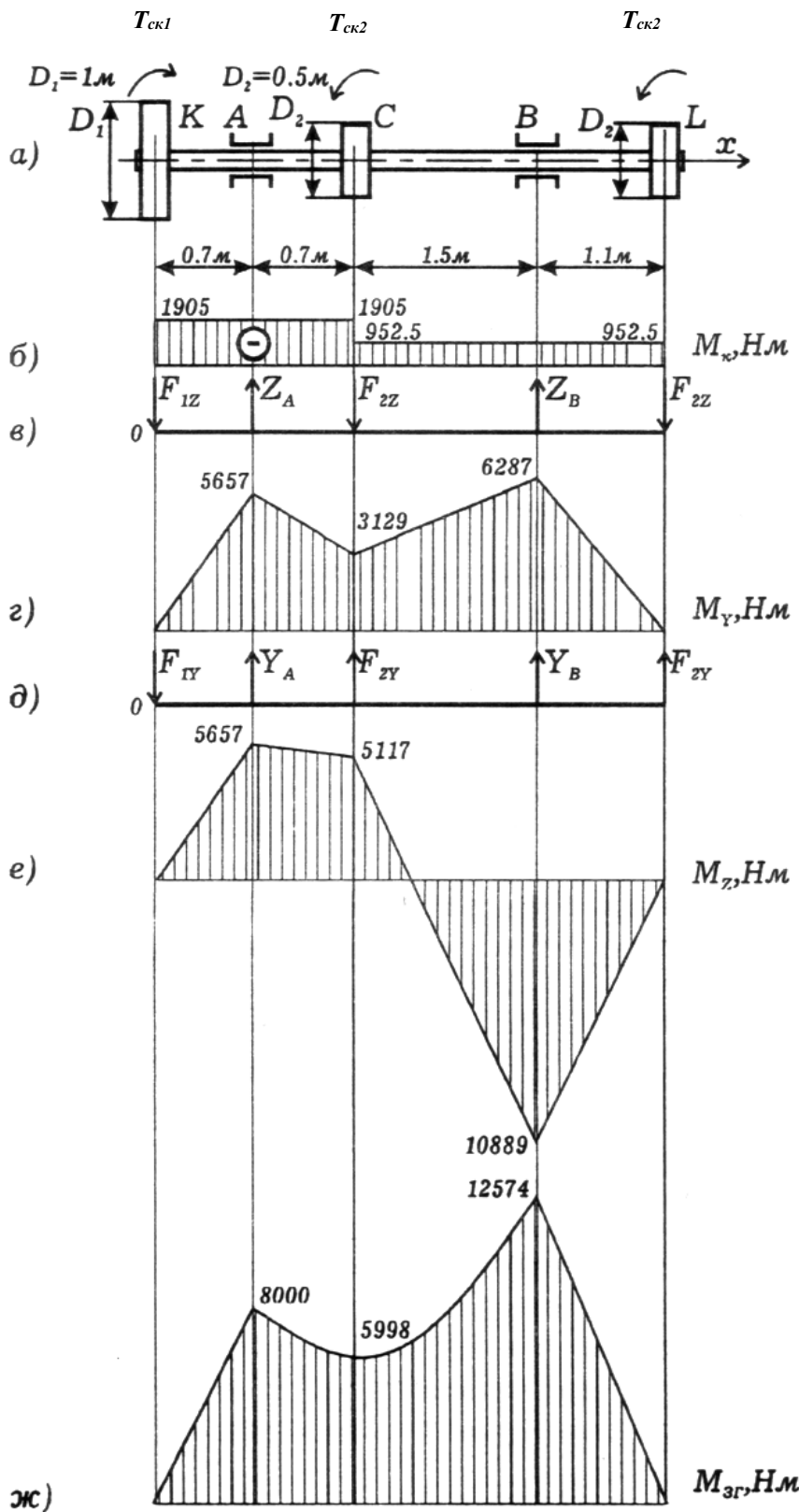


Рис. 2.4

У горизонтальній площині розрахункова схема матиме вигляд, показаний на рис. 2.4д, де

$$F_{1Y} = F_1 \cos \alpha_1 = 11430 \cdot \cos 45^\circ = 8082H;$$

$$F_{2Y} = F_2 \cos \alpha_2 = 11430 \cdot \cos 30^\circ = 9899H,$$

а складові опорних реакцій визначаються з рівнянь:

$$\begin{cases} \sum M_A = F_{1Y} \cdot 0,7 + F_{2Y} \cdot 0,7 + Y_B \cdot 2,2 + F_{2Y} \cdot 3,3 = 0; \\ \sum M_B = F_{1Y} \cdot 2,9 - Y_A \cdot 2,2 - F_{2Y} \cdot 1,5 + F_{2Y} \cdot 1,1 = 0; \end{cases}$$

$$Y_B = -\frac{F_{1Y} \cdot 0,7 + F_{2Y} \cdot 4}{2,2} = -\frac{8082 \cdot 0,7 + 9899 \cdot 4}{2,2} = -20569H;$$

$$Y_A = \frac{F_{1Y} \cdot 2,9 - F_{2Y} \cdot 0,4}{2,2} = \frac{8082 \cdot 2,9 - 9899 \cdot 0,4}{2,2} = 8853H.$$

Перевірка:

$$\sum Y = -F_{1Y} + Y_A + 2F_{2Y} + Y_B = -8082 + 8853 + 19798 - 20659 = 0.$$

Внутрішні згинальні моменти в горизонтальній площині:

$$\begin{aligned} M_Z^K &= 0; \quad M_Z^A = -F_{1Y} \cdot 0,7 = -8082 \cdot 0,7 = -5657 \text{ Нм}, \\ M_Z^C &= -F_{1Y} \cdot 1,4 + Y_A \cdot 0,7 = -8082 \cdot 1,4 + 8853 \cdot 0,7 = -5117 \text{ Нм}, \\ M_Z^L &= 0; \quad M_Z^B = F_{2Y} \cdot 1,1 = 9899 \cdot 1,1 = 10889 \text{ Нм}. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів в горизонтальній площині (рис. 2.4е).
Сумарні згинальні моменти визначаємо за формулою

$$\begin{aligned} M_{3\Gamma} &= \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}; \\ M_{3\Gamma}^K &= 0; \\ M_{3\Gamma}^A &= \sqrt{5657^2 + 5657^2} = 8000 \text{ Нм}; \\ M_{3\Gamma}^C &= \sqrt{3129^2 + 5117^2} = 5998 \text{ Нм}; \\ M_{3\Gamma}^B &= \sqrt{6287^2 + 10889^2} = 12574 \text{ Нм}; \\ M_{3\Gamma}^L &= 0. \end{aligned}$$

Будуємо епюру сумарних згинальних моментів (рис. 2.4ж)

З аналізу епюр M_K і $M_{3\Gamma}$ визначаємо небезпечний переріз:

в точці А ($M_K=1905\text{Нм}$, $M_{3\Gamma}=8000\text{Нм}$);

в точці В ($M_K=952,5 \text{ Нм}$, $M_{3\Gamma}=12574 \text{ Нм}$).

Згідно третьої теорії міцності:

$$\begin{aligned} M_{PO3P.} &= \sqrt{M_K^2 + M_{3\Gamma}^2}; \\ M_{PO3P.A} &= \sqrt{1905^2 + 8000^2} = 8224 \text{ Нм}; \\ M_{PO3P.B} &= \sqrt{952,5^2 + 12574^2} = 12610 \text{ Нм}. \end{aligned}$$

Отже, небезпечний переріз буде в точці В.
З умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{PO3P.B}}{W_o} \leq [\sigma] ,$$

де $W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ - осьовий момент опору поперечного перерізу,

визначаємо діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{PO3P.B}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 12610}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 122,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Діаметр вала приймаємо $d=125\text{мм}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. - К.: Вища школа, 1973.
2. Посацький С.Л. Опір матеріалів. - Л.: Вид. Львів. держуніверситету, 1973.
3. Сопротивление материалов: Методические указания и контрольные задания для студентов - заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных/ Дарков А.В., Кутуков Б.Н. – М.: Высшая школа, 1985.
4. Опір матеріалів: Навчально-методичний посібник/За редакцією С.Г. Гарфа. – К.: Вища школа, 1971.
5. Методичні вказівки для контрольних завдань з опору матеріалів/ Цепенюк М.І., Довбуш А.Д. – Тернопіль, 2009.

Михайло Іванович Цепенюк

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для індивідуальних завдань
з прикладної механіки та опору матеріалів**

